# SPAZI VETTORIALI QUOZIENTI. DUALI

FLAMINIO FLAMINI

## 1. Esercizi Svolti

**Esercizio 1** Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, nell'indeterminata $x$, di grado al piu' 3. Sia $h(x) = x^3 + x^2 \in V$ e si consideri il sottospazio

$$U := \mathrm{Span}\{h(x)\} \subset V.$$

(i) Calcolare $\dim(V/U)$.
(ii) Dati $p(x) = 2x^3 - x + 3,\ q(x) = 9x^3 + 5x^2 - 2x + 6 \in V$, determinare

$$\dim\left(\mathrm{Span}\{p(x),\ q(x)\}\right).$$

(iii) Detta $\pi : V \to V/U$ la proiezione canonica associata al sottospazio $U$, siano $[p(x)] := \pi(p(x))$ e $[q(x)] := \pi(q(x))$ le classi in $V/U$ corrispondenti ai polinomi $p(x)$ e $q(x)$ in (ii); stabilire se

$$[q(x)] \in \mathrm{Span}\{[p(x)]\}$$

in $V/U$.
(iv) Dedurre che

$$\dim\left(\pi(\mathrm{Span}\{p(x),\ q(x)\})\right) = \dim\left(\mathrm{Span}\{p(x),\ q(x)\}\right) - 1$$

e che

$$U \subset \mathrm{Span}\{p(x),\ q(x)\}.$$

*Svolgimento.* (i) Notiamo che $\dim(V) = 4$; la proiezione canonica $\pi : V \to V/U$ associata al sottospazio $U$ e' un'applicazione lineare di spazi vettoriali; inoltre e' suriettiva. Per definizione di proiezione canonica associata ad $U$, si ha inoltre

$$\mathrm{Ker}(\pi) = U.$$

Dal Teorema di Nullita' piu' Rango si ha dunque

$$\dim(V/U) = \dim(\mathrm{Im}(\pi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(\pi)) = \dim(V) - \dim(U) = 4 - 1 = 3.$$

(ii) Poiche' i due polinomi non sono proporzionali, si ha

$$\dim\left(\mathrm{Span}\{p(x),\ q(x)\}\right) = 2.$$

(iii) Notiamo che, in $V$ si ha

$$q(x) - 2p(x) = 5x^3 + 5x^2 = 5(x^3 + x^2) \in U.$$

Pertanto, in $V/U$ si ha

$$[q(x)] = [2p(x)] = 2[p(x)],$$

i.e. $[q(x)] \in \mathrm{Span}\{[p(x)]\} \subset V/U$.
(iv) Da (ii) e (iii) otteniamo immediatamente che $\pi$ contrae il piano vettoriale $\mathrm{Span}\{p(x),\ q(x)\}$ ad una retta vettoriale in $V/U$. Notiamo inoltre che

$$\frac{1}{5}q(x) - \frac{2}{5}p(x) = x^3 + x^2 \in \mathrm{Span}\{p(x),\ q(x)\},$$

quindi $U \subset \mathrm{Span}\{p(x),\ q(x)\}$.

$\square$

**Esercizio 2** Sia data l'applicazione lineare

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

definita da

$$\Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 - 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

ove $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sono le coordinate in $\mathbb{R}^4$ rispetto alla base canonica $e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Sia

$$W := \mathrm{Ker}(\Phi).$$

(i) Verificare che $\dim\left(\mathbb{R}^4/W\right) = 2$.
(ii) Posti

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \ \ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^4$$

stabilire se in $\mathbb{R}^4/W$ si ha

$$[\mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_2],$$

ove $[\mathbf{u}_i] = \pi(\mathbf{u}_i)$, $1 \leq i \leq 2$, con

$$\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4/W$$

la proiezione canonica associata a $W$.
(iii) Determinare una base per $\mathbb{R}^4/W$.
(iv) Detto $U = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, stabilire se

$$\pi_{|_U} : U \to \mathbb{R}^4/W$$

e' un isomorfismo.

*Svolgimento.* (i) L'applicazione lineare $\Phi$ ha matrice rappresentativa (nelle basi canoniche di dominio e codominio)

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha manifestamente rango 2. Per il Teorema di Nullita' piu' Rango, si ha dunque $\dim(W) = 2$. Come nel punto (i) di Esercizio 1, $\dim\left(\mathbb{R}^4/W\right) = 2$.
(ii) Notiamo che

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \notin W.$$

Dunque in $V/W$ si ha $[\mathbf{u}_1] \neq [\mathbf{u}_2]$.
(iii) Una base per $W$ e' data da

$$\{\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_2, \ \mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_3\}.$$

Essa ovviamente si completa ad esempio alla base per $\mathbb{R}^4$ data da

$$\{\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_2, \mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_1, \ \mathbf{w}_4 = \mathbf{e}_4\}.$$

Posto

$$W' := \mathrm{Span}\{\mathbf{w}_3, \ \mathbf{w}_4\}$$

si ha che

$$\mathbb{R}^4 = W \oplus W'.$$

Visto che $\mathbb{R}^4/W \cong W'$, una base per $\mathbb{R}^4/W$ e' data da

$$\{[\mathbf{w}_3], \ [\mathbf{w}_4]\}.$$

(iv) Notiamo che la matrice che ha per colonne i vettori

$$\mathbf{w}_1, \ \mathbf{w}_2, \ \mathbf{u}_1, \ \mathbf{u}_2,$$

espressi in coordinate rispetto alla base $e$, e' la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha manifestamente rango 3. Pertanto $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$; piu' precisamente $\dim(U \cap W) = 1$. Dunque $\dim(\pi(U)) = 1$ mentre $\dim\left(\mathbb{R}^4/W\right) = 2$; questo comporta che $\pi_{|_U}$ non puo' essere un isomorfismo.

$\square$

**Esercizio 3** Si consideri $V := (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ spazio vettoriale euclideo, munito di base canonica $e = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ e prodotto scalare standard $\langle, \rangle$. Sia $V'$ ilo spazio vettoriale duale di $V$ e sia

$$e' = \{F_{\mathbf{e}_1},\ F_{\mathbf{e}_2},\ F_{\mathbf{e}_3}\}$$

la *base duale* della base $e$ (e' per definizione la base di $V'$ per cui

$$F_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij},\ 1 \leq i, j \leq 3,$$

dove $\delta_{i,j}$ il *delta di Kronecher*). Siano dati i vettori

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\ \ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3,\ \ \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \in V.$$

(i) Preso $\phi := 2F_{\mathbf{e}_1} + F_{\mathbf{e}_2} + 3F_{\mathbf{e}_3} \in V'$, determinare $\phi(\mathbf{v}_3)$.
(ii) Verificare che $v = \{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ costituisce una base per $V$.
(iii) Determinare

$$v' = \{F_{\mathbf{v}_1},\ F_{\mathbf{v}_2},\ F_{\mathbf{v}_3}\}$$

la base duale della base $v$, esprimendo i vettori $F_{\mathbf{v}_1},\ F_{\mathbf{v}_2},\ F_{\mathbf{v}_3}$ come combinazioni lineari dei vettori della base duale $e'$.
(iv) Scrivere i funzionali lineari $F_{\mathbf{v}_1},\ F_{\mathbf{v}_2},\ F_{\mathbf{v}_3}$ secondo la rappresentazione di Riesz.

*Svolgimento.* (i) Si ha $\phi(\mathbf{v}_3) = 2 - 1 = 1 \neq 0$.
(ii) La matrice rappresentativa dei vettori $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$ in base canonica $e$ ha manifestamente rango massimo, pertanto $v$ e' una base per $V$.
(iii) Poniamo $F_{\mathbf{v}_1} = \alpha_1 F_{\mathbf{e}_1} + \beta_1 F_{\mathbf{e}_2} + \gamma_1 F_{\mathbf{e}_3}$. Imponiamo ora la condizione che $F_{\mathbf{v}_1}$ sia il primo vettore della base duale della base $v$. Questa condizione e' equivalente ad imporre

$$F_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{v}_1) = 1 \ \Leftrightarrow\ \alpha_1 + \gamma_1 = 1$$

$$F_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{v}_2) = 0 \ \Leftrightarrow\ \gamma_1 = 0$$

$$F_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{v}_3) = 0 \ \Leftrightarrow\ \alpha_1 - \beta_1 = 0.$$

Il precedente sistema non omogeneo di tre equazioni e tre indeterminate e' compatibile, con unica soluzione

$$\alpha_1 = \beta_1 = 1,\ \gamma_1 = 0.$$

In altri termini

$$F_{\mathbf{v}_1} = F_{\mathbf{e}_1} + F_{\mathbf{e}_2}.$$

Con conti esattamente analoghi ai precedenti, si trova

$$F_{\mathbf{v}_2} = -F_{\mathbf{e}_1} + F_{\mathbf{e}_2} + F_{\mathbf{e}_3} \ \text{ e } \ F_{\mathbf{v}_3} = -F_{\mathbf{e}_2}.$$

(iv) Utilizzando il teorema della rappresentazione di Reisz, si ottiene

$$F_{\mathbf{v}_1} = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \_ \rangle$$

$$F_{\mathbf{v}_2} = \langle -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \_ \rangle$$

$$F_{\mathbf{v}_3} = \langle -\mathbf{e}_2,\ \_ \rangle$$

$\square$

**Esercizio 4** Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, nell'indeterminata $x$, di grado al piu' 4. Sia

$$U := \{p(x) \in V \mid p(1) = p(2) = 0\} \subset V.$$

(i) Verificare che $U$ e' un sottospazio di $V$. Calcolarne la dimensione.
(ii) Stabilire se puo' esistere un'applicazione lineare suriettiva

$$\phi : V/U \to \mathbb{R}^3.$$

(iii) Detta $\pi : V \to V/U$ la proiezione canonica associata ad $U$, siano

$$[x] := \pi(x), \quad [x^2 + 2] := \pi(x^2 + 2).$$

Stabilire se le classi $[x]$ e $[x^2 + 2]$ di $V/U$ sono linearmente indipendenti.

*Svolgimento.* (i) $U$ soddisfa gli assiomi di sottospazio. Inoltre

$$p(x) \in U \Leftrightarrow p(x) = (x-1)(x-2)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2).$$

Pertanto $\dim(U) = 3$.
(ii) Come nel punto (i) di Esercizio 1, si ha $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U) = 5 - 3 = 2$. Pertanto non puo' esistere alcuna applicazione lineare $\phi$ come richiesta.
(iii) Notiamo che, in $V/U$ si ha

$$\alpha[x] + \beta[x^2 + 2] = [0]$$

se e solo se

$$\alpha x + \beta(x^2 + 2) \in U.$$

Il polinomio

$$\alpha x + \beta x^2 + 2\beta \in U \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta + 2\beta & = & 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 2\beta & = & 0 \end{array} \right.$$

Il sistema e' compatibile, e.g. $\alpha = 3$, $\beta = -1$. Pertanto le due classi $[x]$ e $[x^2+2]$ di $V/U$ sono linearmente dipendenti. $\square$

**Esercizio 5**: Con notazioni ed assunzioni come in Esercizio 3, sia

$$U = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\} \subset U.$$

Definiamo

$$\mathrm{Ann}(U) := \{\phi \in V' \mid \phi(\mathbf{u}) = 0,\ \ \forall\ \mathbf{u} \in U\} \subseteq V'.$$

Il precedente sottoinsieme viene chiamato *annullatore del sottospazio $U$*.
(i) Verificare che $\mathrm{Ann}(U)$ e' un sottospazio dello spazio vettoriale duale $V'$ di $V$ e calcolarne la dimensione.
(ii) Preso $U^\perp \subset V$, dove l'ortogonalita' e' rispetto al prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, verificare che

$$\mathrm{Ann}(U) \cong (U^\perp)'.$$

(iii) Stabilire se $V/U \cong U^\perp$.
(iv) Stabilire se $(V/U)' \cong (U^\perp)'$.

*Svolgimento.* (i) $\mathrm{Ann}(U)$ verifica banalmente gli assiomi di sottospazio. Notiamo ora che $U = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3\}$ pertanto

$$\phi \in \mathrm{Ann}(U) \Leftrightarrow \phi(\mathbf{e}_1) = 0 = \phi(\mathbf{e}_3).$$

Scrivendo pertanto

$$\phi = \alpha F_{\mathbf{e}_1} + \beta F_{\mathbf{e}_2} + \gamma F_{\mathbf{e}_3},$$

si ha che

$$\phi \in \mathrm{Ann}(U) \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0.$$

In altre parole

$$\mathrm{Ann}(U) = \mathrm{Span}\{F_{\mathbf{e}_2}\}.$$

Pertanto $\dim(\mathrm{Ann}(U)) = 1$.

(ii) Dal punto (i), abbiamo che

$$U^{\perp} = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_2\}.$$

Quindi

$$(U^{\perp})' = \mathrm{Span}\{F_{\mathbf{e}_2}\} \cong \mathrm{Ann}(U).$$

(iii) Poiche' $V = U \oplus U^{\perp}$, si ha che

$$V/U \cong U^{\perp}.$$

(iv) Per dualita',

$$(V/U)' \cong (U^{\perp})'.$$

□